



DES ANTILLES
ET DE LA GUYANE

Problème ENSI 1991 option P

Etude de $xy'' + y' + xy = 0$

Dans tout le problème, on désigne par :

\mathbb{R} l'ensemble des nombres réels ;

\mathbb{R}_+ (respectivement \mathbb{R}_+^*) l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls (respectivement strictement positifs) ;

\mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs ;

x une variable réelle ;

y une fonction de la variable x définie sur une partie de \mathbb{R} , y' et y'' , si elles existent, les dérivées première et seconde de y .

Le but de ce problème est d'étudier différentes propriétés d'une solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0$$

PREMIERE PARTIE

On s'intéresse à la recherche d'une solution de (E) développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

I - 1 - Déterminer une solution F de (E) développable en série entière et telle que $F(0) = 1$; expliciter le rayon de convergence de la série obtenue et calculer $F'(0)$.

I - 2 - Soient g la fonction des deux variables x et θ définie sur $\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$(x, \theta) \rightarrow g(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$$

et h la fonction des deux variables x et t définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1[$ par :

$$(x, t) \rightarrow h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$$

I - 2 - a - Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est absolument convergente quel que soit x dans \mathbb{R} .

I - 2 - b - On pose : $G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, \theta) d\theta$; $H(x) = \int_0^1 h(x, t) dt$

I - 2 - b - i - Montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} .

I - 2 - b - ii - Montrer que G est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et donner l'expression de la dérivée d'ordre n de G sous forme d'une intégrale.

I - 2 - b - iii - Montrer que G est développable en série entière sur \mathbb{R} .

I - 2 - c - On note respectivement G' et G'' les dérivées première et seconde de G .

I - 2 - c - i - Calculer $G(0)$.

I - 2 - c - ii - Utilisant l'expression de G' obtenue en 2-b-ii- montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = -x(G''(x) + G(x))$$

I - 2 - c - iii - Exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$, respectivement de $H(x)$

I - 2 - d - i - Montrer que, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \in] 0, 1 [$ tel que, quel que soit x dans \mathbb{R} :

$$\left| \int_{\alpha}^1 h(x, t) dt \right| < \epsilon/2$$

I - 2 - d - ii - α étant ainsi choisi, calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} h(x, t) dt$

puis déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

I - 2 - d - iii - Montrer que, pour tout x appartenant à \mathbb{R} :

$$H'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

I - 2 - d - iii - Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$

DEUXIEME PARTIE

On se propose de montrer, d'une part, que quel que soit l'entier relatif k , la fonction F s'annule dans tout intervalle $] k\pi, (k+1)\pi [$ et d'autre part que si φ désigne une solution de (E) sur un intervalle $] -\rho, \rho [$ avec $\rho > 0$ alors φ et F sont proportionnelles.

II - 1 - Vérifier que s'il existe un réel x_i tel que $F(x_i) = 0$ alors $F(-x_i) = 0$ et x_i est différent de zéro.

II - 2 - On suppose dans cette question que x est strictement positif et on considère la fonction u de la variable x définie par :

$$x \rightarrow u(x) = \sqrt{x} F(x)$$

II - 2 - a - Montrer que u vérifie une équation différentielle du second ordre du type :

$$u'' + A(x) u = 0$$

u'' désignant la dérivée seconde de u , A une fonction de la variable x que l'on explicitera.

II - 2 - b - Soit v une application deux fois dérivable de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

Montrer que la relation :

$$(R_1) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{d}{dx} [u(x) v'(x) - u'(x) v(x)] = \frac{u(x) v(x)}{4x^2}$$

est vérifiée si et seulement si v est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on explicitera.

II - 2 - c - i - Dédire de ce qui précède que :

$$(R_2) : \forall p \in \mathbb{N}^*, \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx = (-1)^{p+1} [u((p+1)\pi) + u(p\pi)]$$

II - 2 - c - ii - Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx$ converge et est égale à $-u(\pi)$.

II - 2 - d - Utilisant la question II-2-c, démontrer que, quel que soit p dans \mathbb{N} , il existe $x_p \in]p\pi, (p+1)\pi[$ tel que $u(x_p) = 0$; en conclure que F s'annule sur \mathbb{R}_+^* , respectivement sur \mathbb{R}_-^* , une infinité de fois.

II - 3 - a - Montrer que F est de signe constant sur $[-2, 2]$ et préciser ce signe.

II - 3 - b - Dans cette question φ désigne une solution de E sur $] -\rho, \rho[$, avec ρ réel strictement positif.

On pose $\Delta =] -\rho, \rho[\cap [-2, 2]$.

II - 3 - b - i - Ecrire l'équation différentielle (E_1) vérifiée par la fonction z définie sur Δ par :

$$z(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)}$$

II - 3 - b - ii - Dédurre de (E_1) que $x z'(x) - F^2(x)$ est constant sur Δ ; en conclure que les restrictions de φ et de F à Δ sont proportionnelles.

TROISIEME PARTIE

λ désignant un réel non nul, on étudie différentes propriétés de la fonction F_λ de la variable x définie sur \mathbb{R} par : $F_\lambda(x) = F(\lambda x)$.

III - 1 - a - Ecrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par F_λ .

III - 1 - b - Soit a un réel strictement positif. Déterminer toutes les solutions, développables en série entière, de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + axy = 0$$

III - 2 - Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs distinctes de λ . Montrer que, pour tout x réel l'expression

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left[F_{\lambda_1}'(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}'(x) \right] \right\} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x)$$

garde une valeur constante que l'on déterminera.

III - 3 - Dédurre de ce qui précède la valeur de l'intégrale :

$$J = \int_0^1 x F_{x_1}(x) F_{x_j}(x) dx$$

sachant que $F(x_i) = F(x_j) = 0$ et $x_i \neq x_j$.

QUATRIEME PARTIE

s étant un réel strictement positif on se propose de calculer :

$$F^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} F(x) dx$$

IV - 1 - Montrer que F^* converge quel que soit s strictement positif.

IV - 2 - a - t étant un réel quelconque, montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx) dx$$

converge quel que soit s strictement positif et quel que soit t ; calculer sa valeur en fonction de t et de s .

IV - 2 - b - Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + s^2) \sqrt{1-t^2}}$$

converge quel que soit s strictement positif et calculer sa valeur en fonction de s .

IV - 3 - On admet que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{\pi \sqrt{1-t^2}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos(tx) dx \right) dt$$

IV - 3 - a - Calculer $F^*(s)$, $s > 0$.

IV - 3 - b - Calculer $\lim_{\substack{s > 0 \\ s \rightarrow 0}} F^*(s)$



DES ANTILLES
ET DE LA GUYANE

PREMIERE PARTIE

1) Soit y développable en série entière sur $] -R, R[$ ($R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$)

On écrit $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ pour $x \in] -R, R[$.

y est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$; en particulier :

Si $x \in] -R, R[$, $y'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$, $y''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$

(y solution de (E) sur $] -R, R[$) $\Leftrightarrow (\forall x \in] -R, R[$,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in] -R, R[, a_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} k^2 a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in] -R, R[, a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)^2 a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} x^k = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in] -R, R[, a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1}] x^k = 0)$$

(toutes les séries écrites étant convergentes sur $] -R, R[$.)

Par unicité du développement en série entière d'une fonction sur un intervalle ouvert non vide, on en déduit :

$$(y \text{ solution de (E) sur }] -R, R[) \Leftrightarrow (a_1 = 0 \text{ et } \forall k \geq 1, a_{k-1} + (k+1)^2 a_{k+1} = 0)$$

Comme $a_1 = 0$, on obtient aisément par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2(p+1)} = -\frac{1}{(2p+2)^2} a_{2p} = -\frac{1}{4(p+1)^2} a_{2p}.$$

Là encore, une récurrence simple montre que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \frac{(-1)^p}{4^p (p!)^2} a_0.$$

Le rayon de convergence de la série obtenue est alors infini car :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \right| = 0$$

Enfin, $(y(0) = 1) \Leftrightarrow (a_0 = 1)$

Ainsi,

$$F \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k}$$

F est solution de (E) sur \mathbb{R} ; en particulier :

$$F'(0) = 0$$

2) a) Pas de problème d'intégration en dehors de 1 car $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$

est continue sur $[0, 1[$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On constate que si $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1[$, $\frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

Or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge (Arcsin a une limite finie en 1)

Donc

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est absolument convergente quel que soit x dans \mathbb{R}

b) i) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$; dans l'intégrale $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, on effectue le changement de variable $t = \sin \theta$ avec $\theta \in [0, \text{Arcsin}(1-\varepsilon)]$.
 $dt = \cos \theta d\theta = \sqrt{1-t^2} d\theta$.

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\text{Arcsin}(1-\varepsilon)} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto \int_0^u \cos(x \sin \theta) d\theta$ est continue sur \mathbb{R} .

($\theta \mapsto \cos(x \sin \theta)$ est continue sur \mathbb{R})

D'où: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\text{Arcsin}(1-\varepsilon)} \cos(x \sin \theta) d\theta$ existe et vaut $\int_0^{\text{Arcsin}(1)} \cos(x \sin \theta) d\theta$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = H(x)$$

$$\text{ii) } G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto \cos(x \sin \theta)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

La dérivée $2k^{\text{ème}}$ étant $x \mapsto (-1)^k (\sin \theta)^{2k} \cos(x \sin \theta)$

La dérivée $(2k+1)^{\text{ème}}$ étant $x \mapsto (-1)^{k+1} (\sin \theta)^{2k+1} \sin(x \sin \theta)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto (-1)^k (\sin \theta)^{2k} \cos(x \sin \theta)$ et $\theta \mapsto (-1)^{k+1} (\sin \theta)^{2k+1} \sin(x \sin \theta)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ainsi :

G est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, G^{(2k)}(x) = (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2k} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

$$G^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2k+1} \sin(x \sin \theta) d\theta$$

iii) On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |G^{(n)}(x)| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que la série de Taylor associée à G est convergente sur \mathbb{R} :

en effet, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in [0, x]$ ou $[x, 0]$;

$$G(x) = \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} G^{(n+1)}(c).$$

$$\text{D'où : } \left| G(x) - \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{\pi x^{n+1}}{2(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k$ converge et $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

G est développable en série entière sur \mathbb{R}

c) i)

$$G(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(0) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$ii) \forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sin(x \sin \theta) d\theta$$

On effectue une intégration par parties en posant
 $u(\theta) = \sin(x \sin \theta)$ d'où $u'(\theta) = x \cos \theta \cos(x \sin \theta)$
 et $v(\theta) = \cos \theta$ d'où $v'(\theta) = -\sin \theta$.

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left[\cos \theta \sin(x \sin \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 \theta \cos(x \sin \theta) d\theta \\ &= -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos(x \sin \theta) d\theta = -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta - \\ &\quad x \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 \theta) \cos(x \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de I.2.b.ii), on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = -x [G(x) + G''(x)]$$

iii) On sait que les solutions de (E) développables en série entière sur un intervalle ouvert non vide, sont les multiples de la restriction de F à cet intervalle. Or G est développable en série entière sur \mathbb{R} (I.2.b.iii)) et solution de (E) sur \mathbb{R} (I.2.c.ii)) donc G est un multiple de F ;
 or $F(0) = 1$ et $G(0) = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$F(x) = \frac{2}{\pi} G(x) = \frac{2}{\pi} H(x) \quad (\text{voir I.2.bi)})$$

$$d) i) \left| \int_{\alpha}^1 h(x,t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^1 |h(x,t)| dt \leq \int_{\alpha}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin } \alpha$$

$\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ absolument convergente

Or $\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\alpha) \right) = 0 : \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in]0,1[; \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$ (α indépendant de x !) alors $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \int_{\alpha}^1 h(x,t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

ii) Si $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos(xt) dt &= \left[\frac{1}{x} \sin(xt) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right]_0^{\alpha} - \frac{1}{x} \int_0^{\alpha} \sin(xt) \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} dt \\ &\quad \text{intégration par parties} \\ u(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad u'(t) = \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} \\ v(t) &= \sin(xt) \quad v'(t) = \cos(xt) \end{aligned}$$

$$\text{D'où, } \left| \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cos(xt) dt \right| \leq \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{|x|} \int_0^{\alpha} \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} h(x,t) dt = 0 : \exists A > 0; (x \geq A) \Rightarrow \left| \int_0^{\alpha} h(x,t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, si } x \geq A, |F(x)| &= \frac{2}{\pi} |H(x)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\alpha} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{\alpha}^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\alpha} h(x,t) dt \right| + \left| \int_{\alpha}^1 h(x,t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

iii) Comme $H = G$ sur \mathbb{R} , H est dérivable sur \mathbb{R} et $H' = G'$.

$$\text{Or } G'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin \theta \sin(x \sin \theta) d\theta$$

$$\text{et } \forall \epsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[, \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} -\sin \theta \sin(x \sin \theta) d\theta = \int_0^{\sin(\frac{\pi}{2}-\epsilon)} -t \sin(xt) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

changement de variable

$$t = \sin \theta \quad dt = \cos \theta d\theta = \sqrt{1-t^2} d\theta$$

$$\int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ est convergente } \left(\left| \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \right| < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \text{ si } t \in [0, 1[\right)$$

D'où par passage à la limite lorsque ϵ tend vers 0.

$$H'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

iii) On opère comme au I.2.d) :

Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$

$$\left| \int_{\alpha}^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(\alpha) \xrightarrow[\alpha < 1]{\alpha \rightarrow 1} 0$$

On peut donc choisir α de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \int_{\alpha}^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

α étant fixé, on remarque que, pour $x \neq 0$

$$\int_0^{\alpha} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{x} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cos(xt) \right]_0^{\alpha} - \frac{1}{x} \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \right) \cos(xt) dt$$

intégration par parties

$$u(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \quad u'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$$

$$v'(t) = -\sin(xt) \quad v(t) = \frac{\cos(xt)}{x}$$

$$\left| \int_0^{\alpha} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{|x|} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\exists A > 0, \forall x > A, \left| \int_0^{\alpha} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{constante indépendante de } x$$

Alors, si $x > A$,

$$|H'(x)| = \left| \int_0^{\alpha} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt + \int_{\alpha}^1 \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\alpha} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt \right| + \left| \int_{\alpha}^1 \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(xt) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} H'(x) = 0$ et comme $F = \frac{2}{\pi} H$, $F' = \frac{2}{\pi} H'$.

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$$

DEUXIEME PARTIE

II) 1) F est clairement paire (voir développement en série entière)
donc $\forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = F(x)$.
En particulier,

$$\text{Si } F(x) = 0 \text{ alors } F(-x) = 0$$

Enfin, $F(0) = 1 \neq 0$.

2) a) u est définie sur $]0, +\infty[$ et de classe C^∞ sur cet intervalle
(produit de fonctions de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$)

En particulier : $\forall x > 0, u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F(x) + \sqrt{x} F'(x)$

$$u''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} F(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} F'(x) + \sqrt{x} F''(x).$$

On constate alors que $\sqrt{x} u''(x) = -\frac{1}{4x} F(x) + F'(x) + x F''(x)$

$$\text{Ainsi } \sqrt{x} u''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}} u(x) - \sqrt{x} u(x).$$

$$\begin{aligned} &u \text{ vérifie l'équation différentielle:} \\ &u'' + A(x)u = 0 \text{ avec} \\ &A(x) = 1 + \frac{1}{4x^2} \text{ sur }]0, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } ((R_1) \text{ est vérifiée}) &\Leftrightarrow (\forall x > 0, u(x)v''(x) - u''(x)v(x) = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}) \\ &\Leftrightarrow (\forall x > 0, u(x)v''(x) + (1 + \frac{1}{4x^2})v(x)u(x) = \frac{u(x)v(x)}{4x^2}) \\ &\Leftrightarrow (\forall x > 0, u(x)[v''(x) + v(x)] = 0) \end{aligned}$$

Ne connaissant rien des zéros de u sur $]0, +\infty[$, on ne peut conclure directement qu'une condition NECESSAIRE et suffisante pour que (R_1) soit vérifiée est que v soit solution de l'équation différentielle $v'' + v = 0$; en tout cas, cette condition est suffisante et l'on peut se contenter de ça pour résoudre le reste du problème.

Ainsi,

$$\text{Une condition suffisante pour que } (R_1) \text{ soit vérifiée est que } v \text{ soit solution de l'équation différentielle } v'' + v = 0$$

c) i) En particulier, pour $v = \sin$, (R_1) est vérifiée.

(R_1) s'écrit ici :

$$\forall x > 0, \frac{d}{dx} [u(x) \cos x - u'(x) \sin x] = \frac{u(x) \sin x}{4x^2}$$

En particulier, si $p \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx = \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{d}{dx} [u(x) \cos x - u'(x) \sin x] dx$$

$$= [u(x) \cos x - u'(x) \sin x]_{p\pi}^{(p+1)\pi}$$

$$= u[(p+1)\pi] \cos[(p+1)\pi] - u(p\pi) \cos(p\pi)$$

$$= (-1)^{p+1} [u[(p+1)\pi] - (-u(p\pi))]$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx = (-1)^{p+1} [u[(p+1)\pi] - u(p\pi)]$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \forall \varepsilon \in]0, \pi[, \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx &= \left[u(x) \cos x - u'(x) \sin x \right]_{\varepsilon}^{\pi} \\ &= -u(\pi) - u(\varepsilon) \cos \varepsilon + u'(\varepsilon) \sin \varepsilon. \\ \text{Or } u(\varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon} F(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } u'(\varepsilon) \sin \varepsilon &= \left[\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} F(\varepsilon)}_{\xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} + \underbrace{\sqrt{\varepsilon} F'(\varepsilon)}_{\xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} 0} \right] \sin \varepsilon \underset{\varepsilon > 0}{\sim} \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx$ existe et vaut $-u(\pi)$. Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx \text{ converge et est égale à } -u(\pi)}$$

d) Si u ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, l'application $\theta: x \mapsto \frac{u(x) \sin x}{4x^2}$ garde un signe constant sur $]0, \pi[$ (fonction continue ne s'annulant pas)

Si $u > 0$ sur $]0, \pi[$, par continuité de θ , $\int_0^{\pi} \frac{u(x) \sin x}{4x^2} dx > 0$ d'où

$u(\pi) < 0$. Absurde ($u > 0$ sur $]0, \pi[$ et u continue sur \mathbb{R}^+ donc $u(\pi) \geq 0$).

Si $u < 0$ sur $]0, \pi[$, on obtient $u(\pi) > 0$ ce qui est absurde.

Ainsi u s'annule sur $]0, \pi[$.

Plus généralement, si $p \in \mathbb{N}^*$ et si u ne s'annule pas sur $]p\pi, (p+1)\pi[$, θ a le signe de $u \sin$ sur cet intervalle donc le signe de $(-1)^p u$.

Alors, $\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \theta(x) dx$ a le signe de $(-1)^p u$ par continuité de θ .

Donc sur $]p\pi, (p+1)\pi[$, u a même signe que $-u(p\pi) - u((p+1)\pi)$ ce qui est absurde car :

Si $u > 0$ sur $]p\pi, (p+1)\pi[$, $u(p\pi) \geq 0$ et $u((p+1)\pi) \geq 0$ et $-u(p\pi) - u((p+1)\pi) \leq 0$.

Si $u < 0$ sur $]p\pi, (p+1)\pi[$, $u(p\pi) \leq 0$ et $u((p+1)\pi) \leq 0$ et $-u(p\pi) - u((p+1)\pi) \geq 0$.

Ainsi, u s'annule sur $]p\pi, (p+1)\pi[: \forall p \in \mathbb{N}, \exists x_p \in]p\pi, (p+1)\pi[; u(x_p) = 0$.

Comme $u(x) = \sqrt{x} F(x)$ et comme $x_p > 0, \forall p \in \mathbb{N}$, on en déduit $F(x_p) = 0$.

F a un zéro sur chaque intervalle $]p\pi, (p+1)\pi[$ ($p \in \mathbb{N}$) : F s'annule sur \mathbb{R}_+^* une infinité de fois. D'après II.1), F s'annule aussi une infinité de fois sur \mathbb{R}_-^* .

Ainsi,

F s'annule sur \mathbb{R}_+^* , respectivement sur \mathbb{R}_-^* , une infinité de fois

$$3) a) \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x^2}{4} \right)^k$$

Si $x \in [-2, 2]$, $\frac{x^2}{4} \in [0, 1]$; on pose $u_k(x) = \left(\frac{x^2}{4} \right)^k \times \left(\frac{1}{k!} \right)^2$.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k(x).$$

Or $u_k(x) \geq 0$, $\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} = \left(\frac{x^2}{4} \right) \times \frac{1}{(k+1)^2} \leq 1$ donc $(u_k(x))_{k \geq 0}$ est décroissante. $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x) = 0$.

$F(x)$ est la somme d'une série alternée : $F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (u_{2p}(x) - u_{2p+1}(x))$
 $= \underbrace{u_0(x) - u_1(x)}_{\substack{>0 \\ \text{même pour } x=0}} + \sum_{p=1}^{+\infty} [u_{2p}(x) - u_{2p+1}(x)]$
 Ainsi, $F(x) > 0$ si $x \in [-2, 2]$

b) i) z est définie sur Δ , de classe C^∞ sur Δ (quotient de 2 fonctions C^∞ sur Δ , dénominateur ne s'annulant pas sur Δ).

$\forall x \in \Delta$, $\varphi(x) = z(x) \cdot F(x)$.

D'où, $\forall x \in \Delta$, $\varphi'(x) = z'(x) F(x) + z(x) F'(x)$

$$\varphi''(x) = z''(x) F(x) + 2z'(x) F'(x) + z(x) F''(x)$$

$$\begin{aligned} x \varphi''(x) &= x z''(x) F(x) + 2x z'(x) F'(x) + z(x) x F''(x) \\ &\quad - \underbrace{\varphi'(x)}_{-F'(x) - x F(x)} \end{aligned}$$

(car φ et F sont solutions de (E) sur Δ)

D'où $\forall x \in \Delta$, $z'(x) F(x) - z(x) F'(x) - x z(x) F''(x)$

$$= x z''(x) F(x) + 2x z'(x) F'(x) - z(x) F''(x) - x z(x) F''(x)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &z \text{ est solution sur } \Delta \text{ de l'équation différentielle :} \\ &x F(x) z''(x) + [2x F'(x) + F(x)] z'(x) = 0 \end{aligned}$$

ii) On remarque que $x \mapsto x z'(x) F^2(x)$ est dérivable sur Δ et que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Delta, \frac{d}{dx} [x z'(x) F^2(x)] &= [x z''(x) + z'(x)] F^2(x) + 2 F(x) F'(x) x z'(x) \\ &= F(x) [x F(x) z''(x) + (2x F'(x) + F(x) z'(x))] = 0 \\ &= 0 \text{ d'après (E)} \end{aligned}$$

Or Δ est un intervalle. Donc,

$$x z'(x) F^2(x) \text{ est constant sur } \Delta$$

$$\forall x \in \Delta, x z'(x) F^2(x) = 0 \cdot z'(0) F^2(0) = 0$$

D'où $\forall x \in \Delta$, $x z'(x) = 0$ (F ne s'annule pas sur Δ)

$\forall x \in \Delta \setminus \{0\}, z'(x) = 0$
 z' est continue sur Δ) d'où $\forall x \in \Delta$, $z'(x) = 0$

Δ étant un intervalle, on en déduit que $z = \text{cste} = k$ sur Δ

Ainsi : $\forall x \in \Delta$, $\varphi(x) = k F(x)$

Les restrictions de φ et de F à Δ sont proportionnelles

TROISIEME PARTIE

III) 1) a) F_λ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} tout comme F

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_\lambda(x) = \lambda F'(\lambda x)$$

$$F''_\lambda(x) = \lambda^2 F''(\lambda x)$$

$$\text{D'où, } x F''_\lambda(x) = \lambda^2 x F''(\lambda x) = \lambda (\lambda x F''(\lambda x)) = -\lambda F'(\lambda x) - \lambda^2 x F(\lambda x) \\ = -F'_\lambda(x) - \lambda^2 x F_\lambda(x).$$

F_λ vérifie l'équation différentielle :

$$x y'' + y' + \lambda^2 x y = 0$$

b) Si y est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on désigne par y_λ la fonction $x \mapsto y(\lambda x)$.

On constate aisément que y est solution de l'équation proposée sur $] -R, R[$ si et seulement si $y_{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ est solution de (E) sur $] -\sqrt{a} R, \sqrt{a} R[$.

$\sqrt{a} R[$ et y est développable en série entière sur $] -R, R[$ si et seulement si $y_{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ est développable en série entière sur $] -\sqrt{a} R, \sqrt{a} R[$.

Or les seules fonctions développables en série entière et solutions de (E) sur $] -\sqrt{a} R, \sqrt{a} R[$ sont les multiples de la restriction de F à cet intervalle.

Ainsi, les solutions, développables en série entière, de l'équation différentielle $xy'' + y' + axy = 0$ sont les multiples de $F_{\sqrt{a}}$; le rayon de convergence de ces séries est infini.

2) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ x [F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x)] \right\} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) \\ = F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x) + x [F''_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F''_{\lambda_2}(x)] \\ + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) \\ = F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x) + F_{\lambda_2}(x) [-F'_{\lambda_1}(x) - \lambda_1^2 x F_{\lambda_1}(x)] \\ - F_{\lambda_1}(x) [-F'_{\lambda_2}(x) - \lambda_2^2 x F_{\lambda_2}(x)] + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x). \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d}{dx} \left\{ x [F'_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) - F_{\lambda_1}(x) F'_{\lambda_2}(x)] \right\} + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) x F_{\lambda_1}(x) F_{\lambda_2}(x) = 0$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R}, x F_{x_i}(x) F_{x_j}(x) = \frac{1}{x_j^2 \cdot x_i^2} \frac{d}{dx} \left\{ x [F'_{x_i}(x) F_{x_j}(x) - F_{x_i}(x) F'_{x_j}(x)] \right\}$$

$x_i \neq x_j$ (les notations sont celles de II)

On a bien sûr $x_i \neq -x_j$ car $x_i, x_j > 0$.

$$\text{D'où } J = \frac{1}{x_j^2 \cdot x_i^2} \left[x [F'_{x_i}(x) F_{x_j}(x) - F_{x_i}(x) F'_{x_j}(x)] \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{x_j^2 \cdot x_i^2} [F'_{x_i}(1) F_{x_j}(1) - F_{x_i}(1) F'_{x_j}(1)]$$

$$\text{Or } F_{x_j}(1) = F(x_j \times 1) = F(x_j) = 0 \text{ et } F(x_i) = 0.$$

D'où :

$$J = 0$$

QUATRIEME PARTIE

De façon générale, si f est une fonction continue, bornée sur \mathbb{R} ,

$\int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx$ converge quel que soit n strictement positif.

En effet, $\exists M > 0 ; \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq M$.

alors $|e^{-nx} f(x)| \leq M e^{-nx}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-nx} dx$ converge $\left(\int_0^A e^{-nx} dx = \frac{1-e^{-nA}}{n} \right)$

IV) 1) f est continue sur \mathbb{R} et a une limite finie (nulle) en $+\infty$ (et donc aussi en $-\infty$ par parité); donc f est bornée sur \mathbb{R} ; d'après la remarque du début du IV):

f^* converge quel que soit n strictement positif

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |\cos(tx)| \leq 1$. $x \mapsto \cos(tx)$ est continue bornée sur \mathbb{R} , pour tout t réel.

D'après la remarque du début du IV, $\int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos(tx) dx$ converge

quel que soit n strictement positif et quel que soit t .

$$\forall A > 0, \forall n > 0, \int_0^A e^{-nx} \cos(tx) dx = \left[-\cos(tx) \frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^A - \int_0^A \frac{t}{n} e^{-nx} \sin(tx) dx$$

intégration par parties

$$\begin{aligned} u(x) &= \cos(tx) & u'(x) &= -t \sin(tx) \\ v(x) &= -\frac{1}{n} e^{-nx} & v'(x) &= e^{-nx} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} [1 - \cos(tA) e^{-nA}] - \frac{t}{n} \left[-\frac{1}{n} \sin(tx) e^{-nx} \right]_0^A = \frac{t}{n} \int_0^A \frac{1}{n} e^{-nx} \cos(tx) dx$$

intégration par parties

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin(tx) & u'(x) &= t \cos(tx) \\ v(x) &= -\frac{1}{n} e^{-nx} & v'(x) &= e^{-nx} \end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos(tx) dx$ converge, par passage à la limite lorsque A

tend vers $+\infty$, on obtient: $\int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos(tx) dx = \frac{1}{n} - \frac{t^2}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos(tx) dx$
c'est-à-dire:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos(tx) dx = \frac{n}{n^2 + t^2}, \forall n > 0$$

Remarque: On peut aussi obtenir ce résultat en remarquant que:
 $\int_0^A \cos(tx) e^{-nx} dx = \operatorname{Re} \left(\int_0^A e^{-nx} e^{itx} dx \right) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{-n+it} [e^{-nx+itx}]_0^A \right\}$

b) $t \mapsto \frac{1}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$, le seul problème pour

l'intégrale est pour la borne 1.

$$\text{Or } \left| \frac{1}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ converge.}$$

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}}$ converge quel que soit n strictement positif.

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[, \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(1-\varepsilon)} \frac{du}{n^2 + n^2 \sin^2 u}$$

changement de variable

$$\text{Or } u \mapsto \frac{1}{n^2 + n^2 \sin^2 u} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc } \int_0^{\operatorname{Arcsin}(1-\varepsilon)} \frac{du}{n^2 + n^2 \sin^2 u} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{n^2 + n^2 \sin^2 u}$$

$$\text{D'où } \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{n^2+n^2 \sin^2 u} \left(\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}} \text{ converge} \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{n^2+n^2 \sin^2 u} \stackrel{\text{changement}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^2)(n^2+\frac{v^2}{1+v^2})} = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{n^2+(1+n^2)v^2}$$

de variable : $v = \tan u$ $dv = (1+v^2)du$ $\sin^2 u = \frac{v^2}{1+v^2}$
(pas de problème de convergence d'intégrale !)

$$\text{Or } \int_0^A \frac{dv}{n^2+(1+n^2)v^2} = \frac{1}{n^2} \int_0^A \frac{dv}{1+\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right)v^2} = \frac{1}{n^2} \left[\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{n} v \right) \right]_0^A$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1+n^2}}{n} A \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}} \frac{\pi}{2}$$

D'où, Finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+n^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}}$$

3) a) $\forall n > 0$,

$$F^*(n) = \int_0^{+\infty} e^{-nx} F(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \frac{2}{\pi} H(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-sx} \left(\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) dx$$

$$\stackrel{\text{résultat admis}}{=} \int_0^1 \frac{2}{\pi \sqrt{1-t^2}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-nx} \cos(xt) dx \right) dt \stackrel{\text{IV. 2.a)}}{=} \int_0^1 \frac{2}{\pi \sqrt{1-t^2}} \frac{n}{(n^2+t^2)} dt$$

$$= \frac{2n}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(n^2+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

$$\boxed{F^*(n) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \text{ pour } n > 0}$$

b) On trouve immédiatement :

$$\boxed{\lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n > 0}} F^*(n) = 1}$$